Il bello nella matematica: la sezione aurea

Riccardo Rosso,

Dipartimento di Matematica *Felice Casorati*, Università di Pavia

Pavia, Almo Collegio Borromeo, 9 settembre 2010

1 Introduzione

L'oggetto di questo incontro è il numero irrazionale τ noto come *rapporto aureo*

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{1}$$

e del suo *alter ego*, il numero

$$\tau^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{2}$$

noto come *sezione aurea*. Il nome sezione aurea è molto tardo: lo si trova come *goldener schnitt* in un testo tedesco del 1835, *Die reine Elementar-Mathematik* di Martin Ohm, fratello minore del fisico Georg Simon Ohm che ha legato il suo nome alle note leggi dell'elettrotecnica mentre compare per la prima volta nel titolo di un testo nel 1849 in *Der allgemeine goldene Schnitt und sein Zusammenhang mit der harmonischen Theilung* di A. Wiegang. Che cosa hanno di speciale τ e τ^{-1} da attrarre l'attenzione, e non solo dei matematici, da poco meno di 2500 anni?

Sono numeri che compaiono nei contesti più disparati e permettono di gettare legami inattesi tra discipline all'apparenza distanti tra loro. Storicamente, la sezione aurea ha a che fare con il seguente problema geometrico che costituisce la proposizione XI del II Libro degli *Elementi* di Euclide:

Proposizione II.11

Dividere una retta data in modo tale che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente.

Due commenti sono necessari per comprendere il problema. Anzitutto, quando Euclide parla di retta occorre intendere *segmento* di retta: per Euclide, fedele interprete delle categorie aristoteliche, esiste solo l'infinito potenziale, non quello attuale per cui quella che noi intendiamo come retta è solo un segmento che possiamo sempre immaginare di prolungare a piacere. Inoltre l'uguaglianza tra un rettangolo ed un quadrato significa la loro *equivalenza*.

La dimostrazione euclidea poggia su due risultati esposti in precedenza. Anzitutto vi è la Proposizione I.43 che afferma

Proposizione I.43

Dato un parallelogramma $ABCD$ si considerino la diagonale AC e i due segmenti EF e GH paralleli ai lati del parallelogramma che si intersecano nel

punto K di AC. I parallelogrammi $DEKG$ e $KHBF$, detti complementi, sono equivalenti.

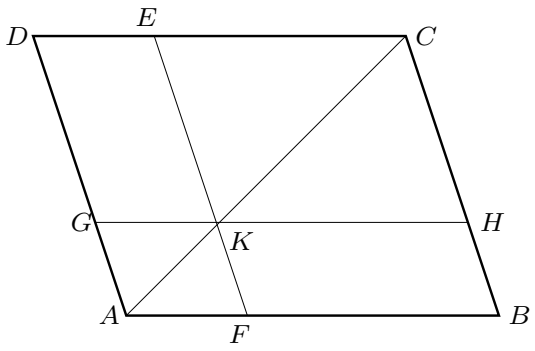

Figura 1: Schema della dimostrazione della Proposizione I.43 degli *Elementi* di Euclide.

Dim. AC divide il paralleogramma $ABCD$ in due triangoli ACD e ACB congruenti e, a fortiori, equivalenti. Lo stesso fa AK in $GKFA$ e KC in $ECHK$ per cui

$$\mathcal{A}(DEKG) = \mathcal{A}(ACD) - \mathcal{A}(ECK) - \mathcal{A}(GKA) = \mathcal{A}(ACB) - \mathcal{A}(HCK) - \mathcal{A}(FKA) = \mathcal{A}(KHBF)\,.$$

Il secondo risultato è il Teorema VI del Libro II. Nel seguito indicherò con $\mathcal{R}(a, b)$ il rettangolo di lati a e b e con $\mathcal{Q}(a)$ il quadrato di lato a:

Teorema II.6

Sia AB una retta data e C il suo punto medio. Si prolunghi AB con la retta BD. Allora

$$\mathcal{R}(AD, DB) + \mathcal{Q}(CB) \equiv \mathcal{Q}(CD)\,.$$

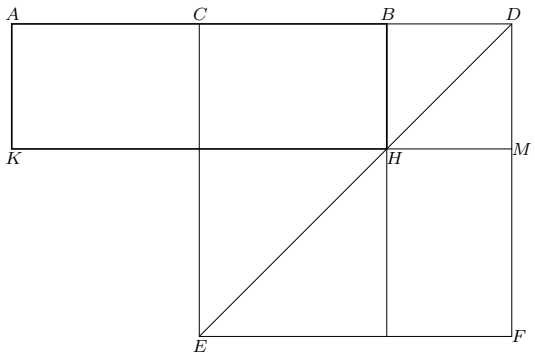

Figura 2: Schema della dimostrazione della Proposizione II.6 degli *Elementi* di Euclide.

Dim. Si consideri il quadrato $CDFE$ e si tracci il segmento DE che determina i punti K, H ed M indicati in figura. Ora

$$\mathcal{R}(AD, DB) = \mathcal{R}(AD, DM) \equiv \mathcal{Q}(BD) + \mathcal{R}(AC, AK) + \mathcal{R}(CB, BH)$$

dove $\mathcal{R}(AC, AK) = \mathcal{R}(CB, BH)$ poiché C è il punto medio di AB. D'altra parte per la Prop. I.43 si ha l'equivalenza di $\mathcal{R}(HM, MF)$ e $\mathcal{R}(CB, BH)$ per cui abbiamo

$$\mathcal{R}(AD, DB) = \mathcal{R}(AD, DM) \equiv \mathcal{Q}(BD) + \mathcal{R}(HM, MF) + \mathcal{R}(CB, BH)$$

ma l'area del membro di destra è la differenza $\mathcal{Q}(CD) - \mathcal{Q}(CB)$ per dimostrare il teorema.

Ora possiamo mostrare la proposizione II.11.

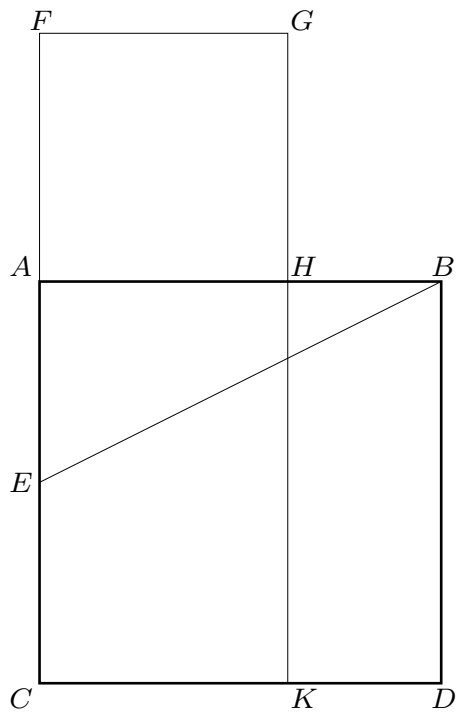

Figura 3: Schema della dimostrazione della Proposizione II.11 degli *Elementi* di Euclide in cui viene costruita la sezione aurea di un segmento assegnato.

Infatti, costruito il quadrato $ABCD$ si consideri il punto medio E di AC e lo si unisca a B. Sul prolungamento di AC si riporti il segmento $EF = AB$. Dal teorema II.6 si ha che

$$\mathcal{R}(CF, AF) + \mathcal{Q}(AE) \equiv \mathcal{Q}(EF) \equiv \mathcal{Q}(EB)\,.$$

D'altronde, il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABE consente di ottenere

$$\mathcal{Q}(EB) \equiv \mathcal{Q}(AB) + \mathcal{Q}(AE)$$

e pertanto concludiamo che

$$\mathcal{R}(CF, AF) \equiv \mathcal{Q}(AB)\,.$$

Se ora si osserva che $\mathcal{R}(CF, AF) \equiv \mathcal{Q}(AH) + \mathcal{R}(AH, AB)$ abbiamo infine

$$\mathcal{Q}(AH) \equiv \mathcal{R}(HB, AB)$$

che dimostra la proposizione II.11.

Prima di procedere, diamo una veste algebrica alla proposizione II.11 che espliciti il legame della sezione aurea con il numero τ^{-1} della (1). Se fissiamo le unità di lunghezza in modo che $AB = 1$ e indichiamo con $x \in (0, 1)$ la lunghezza di AH, cosicché $BH = 1-x$, allora si ha che x è la radice positiva dell'equazione

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{3}$$

e si ha

$$x_+ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \tau^{-1} \qquad x_- = -\frac{1}{x_+} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -\tau\,.$$

Al contrario, prendendo $AH = 1$ e cercando la lunghezza x di AB tale che valga la proposizione II.11 si ottiene che x deve risolvere

$$x^2 - x + 1 = 0$$

che ha per radici

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \qquad x_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\tau^{-1}\,.$$

Dunque, se AH è la sezione aurea di AB il rapporto aureo è AB/AH.

Nel Libro II degli *Elementi* la sezione aurea compare in relazione ad un problema di equivalenza di aree. Nel Libro VI si ripresenta la sezione aurea con la Proposizione VI.30 ed utilizzando la teoria delle proporzioni sviluppata nel Libro V. La definizione 3 afferma

Definizione VI.3

Una retta è detta divisa in estrema e media ragione quando il rapporto tra la lunghezza della retta ed il segmento più grande è uguale al rapporto tra il segmento più grande ed il più piccolo.

Se H è il punto di suddivisione di AB ed $AH > HB$ la definizione coincide con la proporzione

$$AB : AH = AH : HB \tag{4}$$

che coincide con il contenuto dell'equivalenza dimostrata nella proposizione II.11.

Con le proprietà delle proporzioni a disposizioni è possibile mostrare una prima curiosa proprietà della sezione aurea. Se AH è la sezione aurea di AB, quale sarà la sezione aurea di AH? Applichiamo la proprietà dello scomporre alla (4) ottenendo

$$(AB - AH) : AH = (AH - HB) : HB;$$

se riportiamo su AH il segmento $KH = HB$ abbiamo allora

$$HB : AH = AK : HB$$

e permutando medi con estremi otteniamo

$$AH : HB = HB : AK$$

che mostra come la sezione aurea di AH sia la parte restante, HB di AB. A questo punto il procedimento può essere ripetuto all'infinito per cui, risolto il

problema di determinare la sezione aurea al primo passo, si genera un'infinità di sezioni auree in automatico.

Fin qui si tratta di un problema più o meno interessante che però sembra abbastanza marginale. Le cose cambiano quando si considera la costruzione di poligoni regolari non banali come il pentagono ed il decagono. Per questo facciamo un passo indietro e torniamo al Libro IV dedicato alla costruzione di vari poligoni regolari. Richiamiamo che un poligono regolare (convesso) di n lati ha ciascuno degli angoli interni α di valore

$$\alpha = \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right) \tag{5}$$

per cui, ad esempio, il decagono regolare ha angoli interni ciascuno di ampiezza $\alpha = \frac{4}{5}\pi = 144° = 72° \times 2$. Strumentale alla costruzione del decagono regolare è il teorema IV.10 che è formulato sotto forma di problema.

Teorema IV.10

Costruire un triangolo isoscele avente ciascuno degli angoli alla base doppio dell'angolo al vertice.

In altre parole, il triangolo da costruire (con riga e compasso) ha ciascuno degli angoli alla base pari a 72°. Ripetendo la costruzione 10 volte si ottiene il decagono regolare.

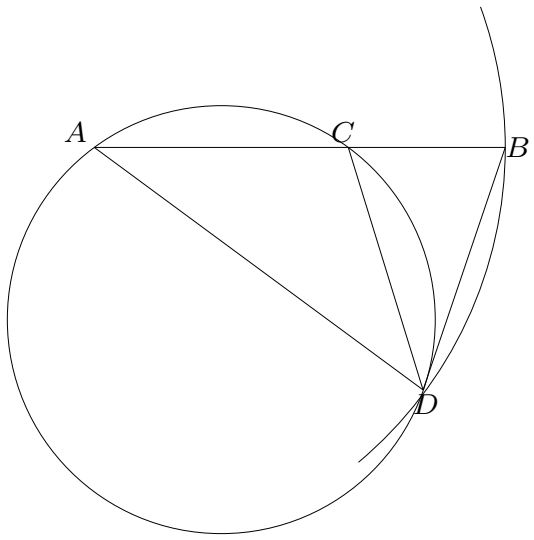

Figura 4: Schema della costruzione di un triangolo isoscele con angoli alla base doppi dell'angolo al vertice.

Dim. Dato un segmento AB qualsiasi si tracci la circonferenza di centro A e raggio AB. Si costrusca la sezione aurea di AB determinando il punto C su AB tale che $\mathcal{R}(AB, CB) \equiv \mathcal{Q}(AC)$ e si prenda sulla circonferenza il punto D tale che $BD = AC$. Il triangolo ABD è isoscele per costruzione. Infine si tracci la circonferenza circoscritta al triangolo ACD. Poiché $BD = AC$ abbiamo che $\mathcal{R}(AB, CB) \equiv \mathcal{Q}(BD)$ che, per il teorema III.37 garantisce che DB è tangente in D alla circonferenza circoscritta ad ACD. In particolare, $\angle(BDC) = \angle(CAD)$ in quanto insistono sullo stesso arco CD. Se aggiungiamo

ad ambo i membri l'angolo $\angle(CDA)$ otteniamo che l'angolo $\angle(BCD)$, esterno al triangolo ACD soddisfa $\angle(BCD) = \angle(CAD) + \angle(CDA) = \angle(BDC) + \angle(CDA) = \angle(BDA) = \angle(ABD)$ che mostra come anche il triangolo BCD sia isoscele con $BD = CD$. Poiché per costruzione $BD = AC$, anche il triangolo ACD è isoscele e $\angle(CDA) = \angle(CAD)$. È sufficiente ora mettere insieme tutte le informazioni per ottenere

$$\angle(BDA) = \angle(ABD) = \angle(BCD) = \angle(CAD)+\angle(CDA) = 2\angle(CAD) = 2\angle(DAB)$$

mostrando il teorema. Dunque nel triangolo isoscele ABD se $AB = AD = 1$, $BD = \tau^{-1} = AC = CD$ che dimostra, tra l'altro, come il lato del decagono regolare sia la sezione aurea del raggio della circonferenza ad esso circoscritta.

Euclide però prende una strada diversa e, con il Teorema IV.11, risolve il problema di inscrivere un *pentagono* regolare in un cerchio assegnato. Per questo egli si serve del Teorema IV.10 per inscrivere un triangolo isoscele ACD con angoli di $36° - 72° - 72°$ nel cerchio assegnato per poi bisecare gli angoli alla base tracciando le bisettrici CE e DB.

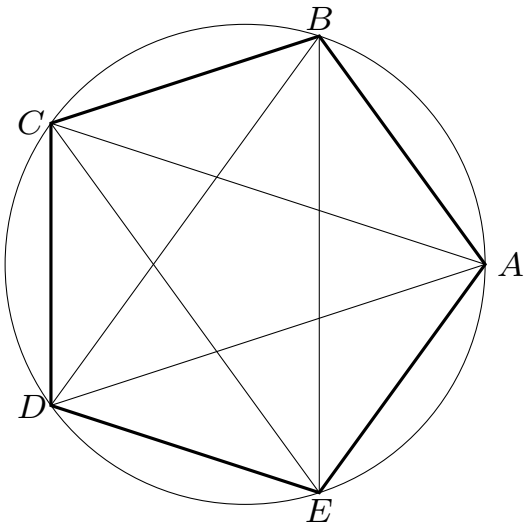

Figura 5: Schema della costruzione di un pentagono regolare.

In questo modo sono determinati cinque archi sulla circonferenza che sottendono gli angoli $\angle(ACE) = \angle(ECD) = \angle(BDA) = \angle(BDC) = \angle(CAD)$ e dunque sono tra loro uguali, così come uguali tra loro le corde sottese che delimitano il pentagono regolare richiesto. Osserviamo che $AD/AE = AD/ED = \tau$. Per concludere questa breve rassegna di teoremi dedicati alpentagono regolare, portiamoci al Libro XIII, l'ultimo autentico degli *Elementi* dove τ viene legato alla costruzione dei solidi platonici, cioè dei poliedri regolari che, a differenza dei poligoni regolari sono in numero *finito*. In questo libro troviamo il seguente teorema.

Teorema XIII.8

In un pentagono regolare le diagonali si tagliano in estrema e media ragione ed i segmenti più lunghi di questa suddivisione hanno lunghezza uguale al lato del pentagono.

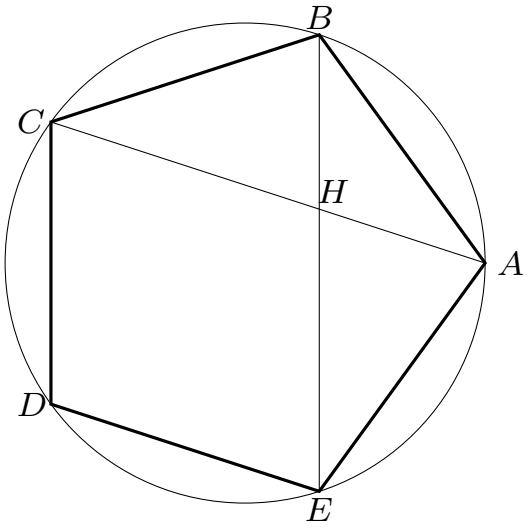

Figura 6: Schema della dimostrazione del Teorema XIII.8 degli *Elementi* di Euclide.

Dim. Inscriviamo il pentagono in una circonferenza ed osserviamo che, essendo il pentagono regolare, i triangoli ABE ed ABC sono congruenti: in particolare abbiamo $\angle(BAC) = \angle(ABE)$ da cui segue che l'angolo $\angle(AHE)$, esterno al triangolo ABH ha ampiezza $\angle(AHE) = 2\angle(BAH)$. Poiché i lati del pentagono sono uguali tra loro, anche gli archi corrispondenti lo sono e pertanto l'arco EC ha ampiezza doppia dell'arco BC. Dunque l'angolo $\angle(EAC)$ che insiste sull'arco EC ha ampiezza doppia di quella dell'angolo $\angle(BAC) = \angle(BAH)$ che insiste sull'arco BC. Dunque abbiamo

$$\angle(HAE) = \angle(EAC) = 2\angle(BAC) = 2\angle(BAH) = \angle(AHE)$$

che dimostra come il triangolo AHE sia isoscele per cui si ha $EH = EA = AB$ che dimostra la seconda parte del teorema. Quanto alla prima parte, osserviamo che i triangoli isosceli ABE ed ABH sono simili in quanto hanno gli angoli alla bae uguali tra loro. Vale allora la proporzione

$$EB : AB = AB : HB$$

ovvero, avendo appena mostrato che $AB = EH$,

$$EB : EH = EH : HB$$

che mostra come EH sia la sezione aurea della diagonale EB.

Questo risultato ci porta a stabilire un collegamento con l'aspetto aritmetico del numero aureo, passando attraverso la scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili. Per questo dobbiamo portarci al discusso e difficile libro X degli *Elementi*, dedicato alla teoria delle proporzioni, dove si trova illustrato l'algoritmo euclideo della sottrazione successiva, che forse sarebbe corretto chiamare algoritmo di Teeteto, che ripropone l'algoritmo illustrato per i numeri nel libro VII, applicandolo alle *grandezze*. Nel libro X si definiscono anzitutto le grandezze commensurabili ed incommensurabili nella definizione I

Definizione X.1

Le grandezze di una collezione sono dette commensurabili se esse hanno una misura comune.

Per Euclide una grandezza B misura la grandezza A se la sua lunghezza od area è contenuta un numero intero di volte nelle lunghezza od area di A.

L'algoritmo euclideo delle sottrazioni successive come criterio di commensurabilità di grandezze viene illustrato nel Teorema X.2

Teorema X.2

Si considerino due grandezze A e B, con $A > B$. Si sottragga ora B da A tutte le volte possibili e si supponga che al termine del processo resti una grandezza C. Si sottragga ora C da B quanto più è possibile e si supponga che al termine del processo resti una grandezza D. Si iteri questo processo e si supponga che la grandezza di ciò che resta ad un certo passo non misuri mai il termine precedente. Allora le grandezze A e B iniziali sono incommensurabili.

Questo processo di sottrazione successiva è noto come *antiferesi*, sottrazione reciproca. Traducendo in simboli moderni, si ha

$$A = n_0 B + C \qquad B = n_1 C + D \qquad C = n_2 D + E \qquad ....$$

e le grandezze A e B son incommensurabili se e solo se questo processo non si arresta mai, cioè se la successione di interi $[n_0, n_1, n_2, ...]$ si estende all'infinito. Ora, è stato suggerito che proprio il processo di antiferesi abbia fornito il contesto entro cui si scoprì l'esistenza di grandezze incommensurabili. In particolare, la procedura funziona efficacemente se effettuata sulla diagonale ed il lato di un pentagono regolare dove dà luogo al *pentagramma* o stella a cinque punte ben nota ai circoli pitagorici cui si fa risalire la scoperta delle grandezze incommensurabili (Figura 7).

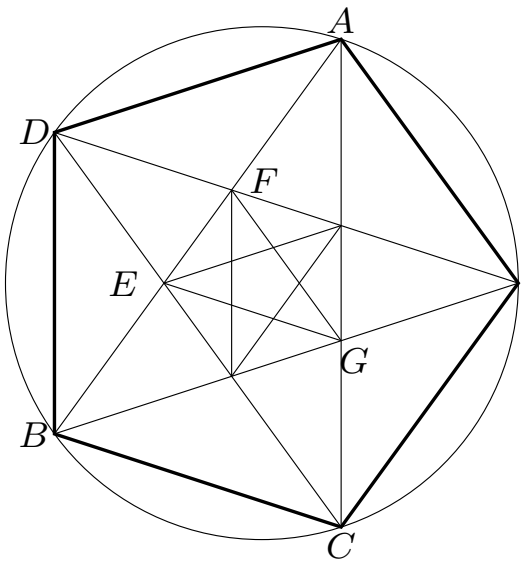

Figura 7: Il processo di antiferesi che dimostra l'incommensurabilità tra diagonale e lunghezza del lato di un pentagono regolare.

La chiave del processo è proprio il contenuto del teorema XIII.8 per cui una coppia di diagonali si tagliano in estrema e media ragione. Osserviamo che

le cinque diagonali di un pentagono regolare ne determinano un altro al loro interno, pure regolare. Considerando allora AB ed AD abbiamo

$$AB = AE + EB = AD + EB \qquad \text{con } EB = AF < AD$$

e

$$AD = AE = AF + FE = FG + FE \qquad \text{con } FE < FG$$

e dunque, con questi due passi l'antiferesi tra diagonale e lato del pentagono originale si è riportata all'antiferesi tra diagonale e lato del pentagono interno e da qui il processo viene fatto ripartire all'infinito, dimostrando l'incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un pentagono. Vediamo ora di tradurre numericamente questo processo. I primi due passaggi dell'antiferesi si traducono nelle uguaglianze

$$\frac{AB}{AD} = 1 + \frac{EB}{AD} = 1 + \frac{1}{\frac{AD}{EB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AE}{AF}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{EF}{FG}}$$

e da qui, iterando il procedimento si ottiene la rappresentazione

$$\frac{AB}{AD} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}}$$

che non si arresta mai. Dunque, poiché sappiamo che $AB/AD = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ abbiamo la rappresentazione del rapporto aureo come *frazione continua*

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}}\,. \tag{6}$$

Per avere il valore esatto di τ dovemmo valutare la frazione continua illimitata del membro di destra. Tuttavia, arrestando il processo ad un certo livello otteniamo delle approssimanti razionali che convergono a τ. Abbiamo come approssimanti

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 + 1 = 2 = \frac{2}{1} \quad 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5}, \quad \frac{13}{8}, \quad \frac{21}{13} \ldots.$$

che ci conducono direttamente al secondo aspetto, quello numerico, in cui compare il numero τ.

2 I numeri di Fibonacci

I numeri di Fibonacci prendono nome dal matematico italiano Leonardo Pisano, detto Fibonacci, cioè figlio di Bonaccio, figura di spicco della matematica medievale. Nella sua opera principale, il *Liber Abaci* del 1202, Fibonacci introdusse ed usò sistematicamente il sistema posizionale in base 10 ma, per quanto ci riguarda, esso ha interesse perché nel Capitolo XII compare il seguente problema

Quante coppie di conigli si otterranno in un anno da una coppia, supponendo che ogni coppia produca ogni mese una nuova coppia la quale sia in grado di produrre un'altra coppia dal secondo mese?

Formalizziamo il problema di FIBONACCI chiamando F_n il numero di coppie adulte presenti al mese n e f_n il numero di coppie non adulte presenti nello stesso mese. Il modello di popolazione proposto da FIBONACCI si descrive con il requisito

$$F_{n+1} = F_n + f_n \qquad f_n = F_{n-1}$$

per cui si ottiene la definizione *ricorsiva*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{7}$$

che definisce la *successione* di FIBONACCI. Per completare, occorre precisare che al mese iniziale $n = 1$ si ha $F_1 = 1$. Avremo in questo modo

$$F_1 = 1\ F_2 = 1\ F_3 = 2\ F_4 = 3\ F_5 = 5\ F_6 = 8\ F_7 = 13\ F_8 = 21\ F_9 = 34\ F_{10} = 55, \ldots.$$

I numeri di FIBONACCI rappresentano pertanto una successione di numeri *interi* che è crescente senza alcun limite: i conigli, nel modello proposto, sono immortali! Se confrontiamo i numeri di FIBONACCI con le frazioni che formano le approssimanti di τ ricavate prima, vediamo che esse sono formate da rapporti di numeri di Fibonacci e suggeriscono il legame

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

con il rapporto aureo. Mostreremo ora questo risultato servendoci di una formula di rappresentazione dei numeri di FIBONACCI dovuta al matematico francese Jacques Philippe Marie BINET (1786-1856) e che è piuttosto sorprendente. La formula di BINET afferma che

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\tau^n - (-\tau)^{-n}]. \tag{8}$$

Questa formula è sorprendente perché esprime i numeri di FIBONACCI, che sono interi, utilizzando operazioni algebriche eseguite su numeri *irrazionali* come τ e $\sqrt{5}$.

Per mostrare la formula di BINET, chiediamoci se sia possibile che una successione definita da (7) possa anche essere una progressione geometrica, cioè tale che il rapporto tra due termini consecutivi sia una costante α, ovvero che valga

$$F_n = \alpha F_{n-1}\,.$$

Combinando questo requisito con (7) ottniamo l'equazione per α

$$(\alpha^2 - \alpha - 1)F_{n-1} = 0$$

che ammette le soluzioni

$$\alpha = \tau \qquad \text{e} \qquad \alpha = -\tau^{-1}\,.$$

Ora, in una progressione geometrica si ha $F_n = \alpha^{n-1}F_1$ per cui possiamo scrivere

$$F_n = \tau^{n-1}c_1 + (-\tau)^{-(n-1)}c_2$$

dove le costanti c_1 e c_2 vanno determinate richiedendo che $F_1 = F_2 = 1$. Si ha dunque il sistema

$$\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ \tau c_1 - \frac{c_2}{\tau} = 1 \end{array}$$

da cui si ricava, utilizzando il valore di τ,

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\tau \qquad c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\tau^{-1}$$

per cui otteniamo

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\tau^n - (-\tau)^{-n}\right]$$

che è proprio la formula di Binet. Non è difficile ora mostrare che, essendo $\tau > 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\tau^{n+1} - (-\tau)^{-n-1}\right]}{\left[\tau^n - (-\tau)^{-n}\right]} = \tau\,.$$

La formula di Binet ha una certa importanza perché consente di calcolare rapidamente, con l'ausilio di un calcolatore elettronico i numeri di Fibonacci corrispondenti a grandi valori di n evitando il calcolo dell'intera successione.

I numeri di Fibonacci sono dotate di innumerevoli proprietà. Qui ne menziono una che ammette una interessante applicazione geometrica, segnalata da Alfred Brousseau.

Osserviamo che

$$F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2$$

e che, applicando in sequenza questa proprietà, abbiamo le identità

$$\begin{array}{l} F_1^2 = F_1 F_2 \\ F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2 \\ F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{array}$$

che, una volta sommate, forniscono la relazione

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots. + F_n^2 = F_n F_{n+1} \tag{9}$$

la cui interpretazione geometrica è riportata nella figura seguente: un rettangolo avente per lati due numeri di Fibonacci successivi si può scomporre nell'unione di quadrati non sovrapposti i cui lati sono sempre numeri di Fibonacci successivi.

Osserviamo che il rettangolo così costruito ha i lati che stanno nel rapporto F_{n+1}/F_n e che dunque, al limite per $n \to \infty$, tende a diventare un (enorme) *rettangolo aureo*, i cui lati sono nel rapporto $\tau/1$. I numeri di Fibonacci sono protagonisti di un curioso paradosso geometrico proposto nel 1868 dal matematico tedesco Oscar Xavier Schlömilch (1823 - 1901) e generalizzato dal reverendo inglese Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), meglio noto come Lewis Carroll, autore del fortunato *Alice in Wonderland* e che fu valido matematico, docente ad Oxford presso il Christ Church College per circa trent'anni.

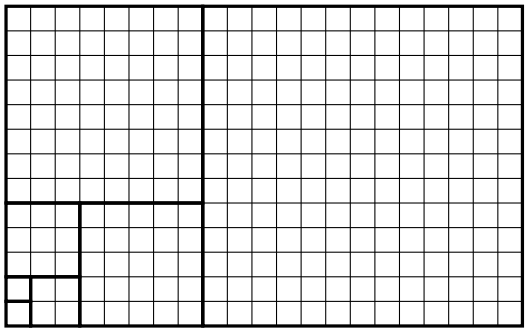

Figura 8: Significato geometrico della proprietà (9).

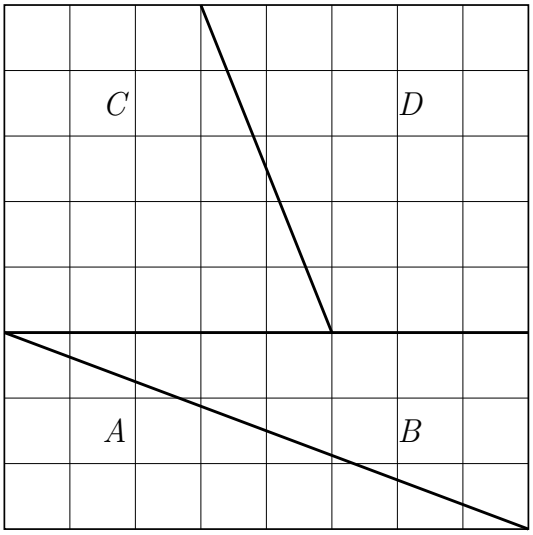

Figura 9: Un paradosso geometrico.

Si consideri un quadrato di lato 8 unità e lo si scomponga come indicato nella figura 9 e si ricompongano le parti A, B, C, D in modo da formare il rettangolo di Fig. 10, i cui lati misurano 5 e 13.

Siccome inizialmente le parti non si sovrapponevano, ci si aspetta che il quadrato iniziale ed il rettangolo finale siano equivalenti ed invece si ha $A_R - A_Q = 65 - 64 = 1$.

Il trucco è che i lati del quadrato e del rettangolo sono numeri di Fibonacci successivi ed è possibile mostrare per induzione che

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}\,. \tag{10}$$

Infatti, la formula è vera per $n = 1$ dove si riduce a $2 \cdot 1 - 1^2 = 1$. Supponiamola vera al passo n e deduciamo che deve essere vera al passo $n+1$. Occorre dunqe mostrare che

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^n\,,$$

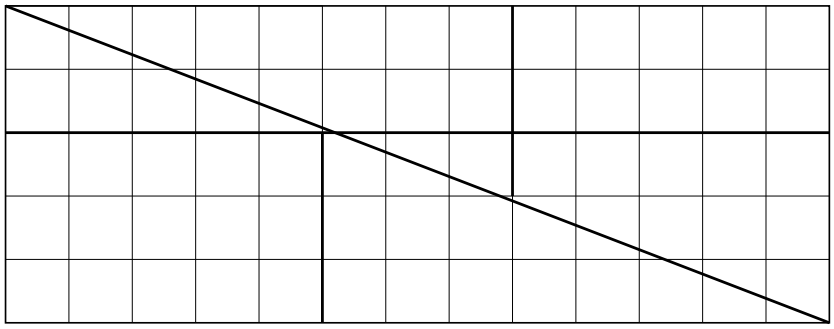

Figura 10: Trasformazione (ingannevole) del quadrato di partenza in un rettangolo di area maggiore di una unità.

una volta che sia data per verificata la (10). Basta servirsi della definizione di numeri di FIBONACCI per trasformare

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n - (F_{n+1} - F_n)(F_{n+1} + F_n) = \\ = F_{n+1}F_n - F_{n-1}(F_{n+1} + F_n)$$

e richiamare la (10) per ottenere

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_{n+1} - F_{n-1}F_n = -(-1)^{n-1} + F_n[F_{n+1} - F_n - F_{n-1}] = (-1)^n$$

dove, nell'ultimo passaggio, è stata ancora utilizzata la definizione (7). Crescendo n, la differenza *relativa* delle aree diventa sempre minore rendendo sempre più plausibile il paradosso.

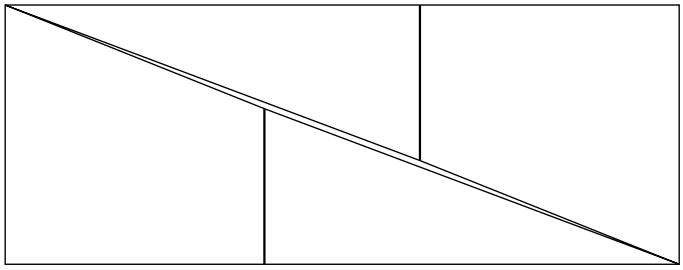

Figura 11: Soluzione del paradosso geometrico. Le quattro parti A, B, C e D in cui era stato suddiviso il quadrato di partenza *non* combaciano nella nuova configurazione rettangolare ma lasciano una fessura a forma di parallelogramma, di area unitaria.

Non dovrebbe a questo punto sorprendere che, se si parte da un quadrato che abbia per lato una potenza di τ, la scomposizione che dava prima origine al paradosso, diventa invece possibile esattamente. Prendiamo ad esempio un quadrato di lato τ^2 ed osserviamo che $\tau^2 = \tau + 1$ per cui possiamo effettuare la scomposizione indicata in figura (12). Il rettangolo ottenuto riassemblando le parti ha lati τ e $1 + 2\tau$ per cui l'area è $\tau + 2\tau^2 = 2 + 3\tau$ come anche il quadrato di partenza in quanto $\tau^4 = (1 + \tau)^2 = 1 + 2\tau + \tau^2 = 2 + 3\tau$.

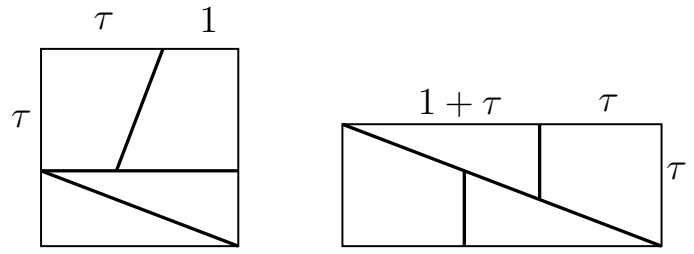

Figura 12: Il rettangolo cui lati sono nel rapporto pari a $1 + 2\tau/\tau$ consente di effettuare la scomposizione al centro del paradosso geometrico senza fessure.

Un altro rettangolo che ha un ruolo importante è il *rettangolo aureo*, un rettangolo i cui lati stanno nel rapporto $\tau : 1$. La prima proprietà è l'autosimilarità che dipende in ultima analisi dal fatto che la sezione aurea della sezione aurea di un segmento è il segmento residuo. Pertanto, considerando il quadrato unitario $ABCD$ si costruisca il rettangolo aureo $AFGD$, come visto in precedenza. Dunque AB è la sezione aurea di AF e pertanto $BF = CG$ è la sezione

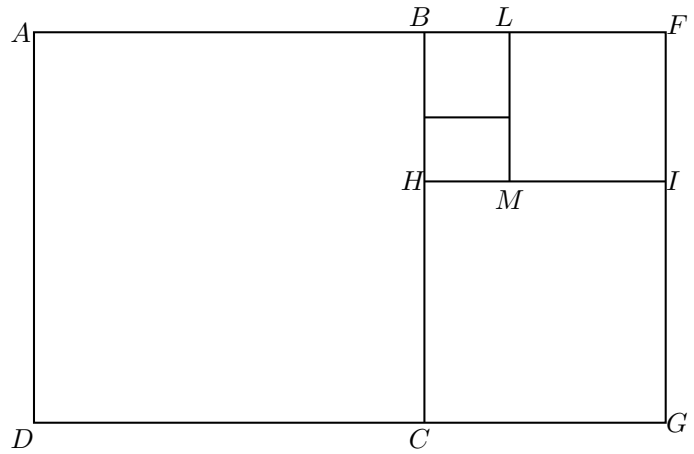

Figura 13: Proprietà di autosimilarità del rettangolo aureo.

aurea di $AD = BC$ ed anche il rettangolo $BFCG$ è aureo. Riportato CG su BC si ottiene il segmento HC la cui sezione aurea è $BH = LM$. Riportato il segmento $FL = LM$ su AF si ha che BL è la sezione aurea di LM e dunque anche il rettangolo $BLMH$ è aureo e così via all'infinito. Dunque si ottiene una famiglia di rettangoli aurei uno incapsulato dentro l'altro che, per definizione, sono tutti simili tra loro. I rettangoli sono sempre più piccoli e tendono a degenerare in un punto che coincide con l'intersezione delle diagonali AF e BG dei primi due rettangoli aurei della famiglia. È proprio questa proprietà che è alla base dell'ubiquità della sezione aurea. Anzitutto è possibile mostrare che, se si dispongono su tre piani mutuamente ortogonali tre rettangoli aurei congruenti con lo stesso centro di simmetria, avendo cura di non disporre mai lati congruenti parallelamente uno all'altro, i dodici vertici ottenuti sono vertici di un icosaedro regolare. In due dimensioni spaziali il rettangolo aureo è legato

alla *spirale logaritmica*. Una spirale è, in parole povere, una curva che si avvolge infinite volte attorno ad un punto fisso O senza mai autointersecarsi. La spirale logaritmica può essere introdotta con una definizione meccanica come la traiettoria di un punto P che si muove su una retta s con velocità proporzionale alla sua distanza da un punto O fisso di s mentre s ruota attorno ad O con velocità angolare costante. Introdotte le coordinate polari cartesane (r, ϑ) del punto P le condizioni cinematiche si traducono nelle richieste

$$\frac{dr}{dt} = kr \qquad \text{e} \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

dove k ed ω sono costanti. La traiettoria si ottiene eliminando il tempo da queste equazioni ricavando, grazie al teorema di derivazione di funzioni composte

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{k}{\omega}r$$

ed ottenere l'equazione polare della spirale

$$r(\vartheta) = r_0 e^{b\vartheta}$$

dove si è posto $b := \frac{k}{\omega}$, e è la base dei logaritmi naturali ed r_0 è una costante che rappresenta la distanza di P da O quando $\vartheta = 0$. Tra tutte queste curve consideriamo quella in cui $r_0 = 1$ e $b = \frac{2}{\pi}\ln\tau$. Dalle proprietà dei logaritmi segue allora che

$$r(0) = 1 \quad r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tau \quad r(\pi) = \tau^2 \ldots. \qquad r\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \tau^k :$$

la spirale logaritmica considerata taglia gli assi coordinati nei punti la cui distanza dall'origine O è una potenza di τ. Come il rettangolo aureo anche la corrispondente spirale logaritmica ha proprietà di autosimilarità che sembrano ben conciliarsi con il meccanismo alla base della crescita di alcuni molluschi che si ingrandiscono mantenendo inalterata la forma. La rilevanza del rapporto aureo nella *fillotassi*, cioè nella disposizione delle foglie delle piante sui rami dipende da un'altra proprietà di τ, ovvero dei numeri di Fibonacci che entrano nelle sue approssimanti razionali.

3 La sezione aurea e l'arte

Molto, forse troppo, è stato scritto sul ruolo che la sezione aurea τ^{-1} avrebbe giocato nell'arte, soprattutto nelle arti figurative. A pittori quali Leonardo da Vinci è stato attribuito l'uso deliberato della sezione aurea nella determinazione delle proporzioni dei soggetti di tele o disegni: nel caso di Leonardo può aver giocato un ruolo il fatto che egli avesse illustrato il volume di Luca Pacioli *De Divina Proportione*, dedicato alla sezione aurea. Si tratta di ricostruzioni fantasiose che non sono suffragate da alcun fondamento, come ha tra gli altri evidenziato George Markowsky in un articolo [4] dove egli prende di mira i falsi *avvistamenti* della sezione aurea in campo artistico. In questo articolo vengono messe in discussione alcune *classiche* associazioni tra sezione aurea ed achitettura, prima fra tutte la progettazione del Partenone di Atene. Verso il 1850 fu osservato che la facciata del Partenone era inscrivibile con buona approssimazione in un rettangolo aureo. Tale osservazione non ha del tutto retto la

prova delle misure ed anzi pone un problema di fondo. Come è possibile asserire che un rapporto di misure approssimi bene un numero *irrazionale* come τ^{-1} e non un qualsiasi altro numero irrazionale prossimo ad esso? Resta comunque il fatto che una costruzione geometrica che coinvolge il rettangolo aureo è alla base della pianta del Partenone [3]. Il *mito* del rettangolo aureo come rettangolo più armonioso si basa in parte su alcuni esperimenti condotti nel 1876 dallo psicologo tedesco Theodor Fechner in base ai quali, tra dieci rettangoli di proporzioni diverse, la maggior parte delle persone riteneva quello aureo il più piacevole esteticamente. Anche qui, Markowsky ha espresso molte riserve effettuando altre prove in cui il numero dei rettangoli era superiore ed ottenendo una distribuzione più variegata di rettangoli *piacevoli* [4].

Un altro interessante svarione sulla presenza della sezione aurea nell'arte riguarda la struttura dell'Eneide di Virgilio. Nel 1962 George E. Duckworth pubblicò uno studio dal titolo *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid: A study in Mathematical Composition* in cui sosteneva che Virgilio avesse impiegato τ^{-1} come elemento chiave della struttura dell'Eneide. Egli misurava i versi ripartendoli in passaggi maggiori (M) e minori (m) sostenendo che $M + m$ avesse M come sezione aurea. Per provare quanto asserito, Duckworth osservava che il rapporto $M/(m + M)$ risultava molto prossimo a τ^{-1} mentre m/M era più discosto dalla sezione aurea. A parte il fatto che, se M fosse sezione aurea di $M + m$, entrambi i rapporti dovrebbero coincidere con la sezione aurea, Duckworth era in effetti caduto in un *tranello* matematico in quanto è possibile mostrare che se si ha una distribuzione casuale con legge uniforme di numeri $r \in [0, 1]$, il rapporto $1/(1 + r)$ non ha valore medio $1/2$ ma

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2 \approx 0.69\,,$$

non molto distante dal valore di $\tau^{-1} \approx 0.61.....$

Più semplicemente vale un semplice risultato di analisi, a volte citato come teorema di Dalzell, che si può enenciare in questi termini [5, 6]

Teorema 3.1. *Siano dati du numeri reali a e b, con $0 \le a \le b$ e sia $\varphi = \tau^{-1}$ la sezione aurea dell'unità. Allora*

$$\left|\frac{b}{a+b} - \varphi\right| \le \left|\frac{a}{b} - \varphi\right|\,. \tag{11}$$

Dim. Posto $x := \frac{a}{b} \in [0, 1]$ e $f(x) := \frac{1}{1+x}$ occorre mostrare che

$$|f(x) - \varphi| \le |x - \varphi| \quad \forall x \in [0, 1]\,.$$

Infatti, dal teorema del valor medio di Lagrange si ha che $\forall x \in [0, 1]$ $\exists \xi \in (x, \varphi)$ (o in (φ, x)) tale che

$$|f(x) - f(\varphi)| = |f'(\xi)||x - \varphi|$$

e, siccome $|f'(\xi)| \le 1$ nell'intervallo $[0, 1]$ il teorema segue subito osservando che, dall'equazione (3), segue che $f(\varphi) = \varphi$.

Più accorto di Duckworth è stato John Putz che, esaminando la durata in battute delle sonate per pianoforte di Mozart [5] ha osservato che il rapporto

tra la durata a dell'esposizione del tema e quella $b > a$ del suo sviluppo sembrano fornire ottime approssimazioni della suddivisione in media ed estrema ragione della durata complessiva $a + b$ delle sonate. Tra l'altro, non solo il rapporto $b/(a+b)$ ma anche a/b sono molto vicini alla sezione aurea τ^{-1}. Ciononostante, PUTZ è giustamente cauto in quanto osserva che la forma della sonata è tale da rendere del tutto improponibili tutti i possibili valori di a e b ma che, al contrario, appare plausibile una limitazione di a nell'intervallo $a \in [\frac{m}{4}, \frac{m}{2}]$ dove $m := a + b$. Se si tiene conto di questo vincolo il valor medio di $\frac{a}{b}$ nell'ipotesi di una distribuzione per il resto uniforme della durata dei movimenti, è stimato da

$$\int_{\frac{m}{4}}^{\frac{m}{2}} \frac{x}{m-x} dx = 4 \ln \frac{3}{2} - 1 \approx 0.6219\,,$$

sufficientemente vicino al valore di τ^{-1} da suggerire un atteggiamento prudente nei confronti della presenza della sezione aurea come elemento fondante nella costruzione delle sonate di MOZART, del quale è peraltro nota la passione per l'aritmetica.

4 Sistemi di numerazione basati sui numeri di FIBONACCI

Il sistema di numerazione che noi adoperiamo è posizionale in base dieci. Ciò significa che ogni intero viene scritto come somma di potenze di 10 moltiplicate per coefficienti variabili da 0 a 9. Ad esempio: $2010 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$. La base 10 non è l'unica utilizzata; per i calcolatori elettronici è fondamentale il sistema di numerazione *binario* in cui la base è 2 e dove una scrittura del tipo 1101 significa $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \equiv 13$, in base 10. La caratteristica di questi sistemi è che vengono usate le potenze di una base *fissa* per sviluppare un certo numero. In altre parole, si fissa un insieme di *pesi* (nel caso di un sistema in base a essi sono le cifre dei numeri inferiori ad a) che vanno moltiplicati per gli elementi della base (le potenze di dieci) per poi sommare i risultati parziali. Perché un insieme di numeri formi una base occorre che la rappresentazione sia unica e ben definita per tutti gli interi. Nel 1972, il matematico dilettante belga Edouard ZECKENDORF (1901-1983) mostrò come fosse possibile rappresentare i numeri naturali come somma di numeri di FIBONACCI o di LUCAS, questi ultimi essendo legati con i primi da molteplici relazioni. Le cifre che compaiono nello sviluppo sono solo 0 ed 1 come nel sistema binario, con una particolarità in più: non è mai possibile che in uno sviluppo in numeri di FIBONACCI compaiano due uno consecutivi, una caratteristica importante in teoria dei codici dal momento che permette di utilizzare una stringa 11 come segno di passaggio da una parola ad un'altra. Nella rappresentazione di ZECKENDORF di un intero vengono usati i numeri di FIBONACCI a partire da $F_2 = 1$ mentre si elimima $F_1 = 1$ che sarebbe un inutile doppione. Supponiamo di voler trovare la rappresentazione di ZECKENDORF del numero 51. Il numero di FIBONACCI che meglio lo approssima per difetto è $F_9 = 34$; similmente $17 = 51 - 34$ ha come miglior approssimazione di FIBONACCI per difetto $F_7 = 13$ mentre $4 = 17 - 13 = F_4 + F_2$ per cui la rappresentazione di ZECKENDORF di 51 è $10100101 \equiv 34 + 13 + 3 + 1$. Dimostriamo che la rappresentazione di ZECKENDORF copre tutti gli interi [7]. Per questo osserviamo che col solo F_1 si rappresentano 0 ed $1 \cdot F_1 = 1 = 3 - 2 = F_3 - 2$;

con l'insieme $\{F_1, F_2\}$ si coprono, oltre a 0 ed 1, $2 = 1 \cdot F_2 + 0 \cdot F_1 \equiv 10$ e $3 = 1 \cdot F_2 + 1 \cdot F_1 \equiv 11$, tralasciando per ora il vincolo sugli uno adiacenti: dunque si coprono tutti gli interi fino a $3 = 5 - 2 = F_4 - 2$. Questi casi lasciano supporre che, introducendo i numeri di FIBONACCI fino ad F_n si riescano a coprire gli interi fino a $F_{n+2} - 2$ compreso. Dimostriamolo per induzione. Se $n = 1$, abbiamo visto che la proprietà è vera; supponiamo allora che sia vero che, presi gli elementi della base fino a F_{n-1}, si rappresentano, magari senza unicità, gli interi fino ad $F_{n+1} - 2$ ed aggiungiamo F_n alla base. Ciò significa che potrò coprire tutti gli interi fino a

$$F_n + F_{n+1} - 2 = F_{n+2} - 2\,,$$

in base alla definizione (7), come si doveva dimostrare. Quanto all'unicità, facciamo intervenire il divieto di avere due uno contigui nella rappresentazione. Allora, il sistema $\{F_1, F_2\}$ rappresenta in modo univoco solo $1 = F_1$ e $2 \equiv 10 = F_2$. Aggiungiamo F_3 ed il sistema $\{F_1, F_2, F_3\}$ e facciamo intervenire il divieto menzionato. La presenza di due uno contigui significa che nello sviluppo di un numero compare la stringa $1 \cdot F_n + 1 \cdot F_{n-1} = F_{n+1}$. Con questa regola abbiamo $3 = 2+1 = F_2+F_1 = F_3 \equiv 100$ e $4 = F_3+F_1 = 101$. Aggiungiamo $F_4 = 5$ ed abbiamo $5 = F_4 = 1000$, $6 = 5+1 = F_4+F_1 = 1001$ e $7 = 5+2 = F_4+F_2 = 1010$. Mostriamo che la rapresentazione $6 = 3+2+1 \equiv 111$ si riduce alla precedente. Infatti $111 = F_3+F_2+F_1 = F_4+F_1 = 1001$. In questo caso sembra che il sistema $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ riesca a fornire una rappresentazione univoca agli interi fino ad $F_{n+1} - 1$ compreso. Mostriamolo ancora per induzione. Abbiamo verificato che questa proprietà è vera per $n = 1$; supponiamola verificata fino ad $n - 1$ e dimostriamola al passo n. Dunque supponiamo che il sistema $\{F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}\}$ possa rappresentare in modo univoco tutti gli interi fino a $F_n - 1$ incluso ed aggiungiamo F_n alla base. Non possiamo utilizzare F_n con interi che abbiano F_{n-1} ma solo con quelli fino a F_{n-2} per i quali l'ipotesi di induzione garantisce che si ha unicità fino a $F_{n-1} - 1$. L'aggiunta di F_n consente di dare un'unica rappresentazione agli interi fino a $F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1$, come occorreva dimostrare. Un'altra particolarità della rappresentazione di ZECKENDORF è il comportamento del riporto nelle addizioni: a differenza delle somme con basi formate da elementi del tipo a^n, qui si hanno due riporti. Per comprendere il motivo è sufficiente osservare che

$$2F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$$

come si ottiene applicando due volte la definizione (7):

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = F_n + (F_n - F_{n-2})\,.$$

Vediamo allora il comportamento della rappresentazione di ZECKENDORF per l'addizione considerando la somma $15 + 23$ [8]. Si rappresentano gli addendi con i numeri di Fibonacci. Ora, $15 = 13 + 2 = F_6 + F_2 \equiv 100010$ e $23 = 21+2 = F_7+F_2 \equiv 1000010$. Incolonniamo i due numeri ed eseguiamo l'addizione ignorando per il momento il vincolo sulle cifre (0 ed 1) che possono comparire nella rappresentazione

$$\begin{array}{r} 100010 \\ 1000010 \\ ===== \\ 1100020 \end{array}$$

ed eliminiamo i due 1 contigui con la regola vista in precedenza: $1100020 = 10000020$ ed eliminiamo il 2 con la regola appena esposta per cui $2F_2 = F_3 + F_0$. La presenza di F_0, che è stato escluso dalla rappresentazione, non deve preoccupare perché $F_0 = F_1 = 1$ per cui in questo caso il riporto si può scrivere $2F_2 = F_3 + F_1$ e dar luogo, in definitiva a $10000101 = F_8 + F_3 + F_1 = 34 + 3 + 1 = 38$, come deve essere.

Riferimenti bibliografici

[1] R. Herz-Fischler: *A Mathematical History of the Golden Number.* Dover, Mineola (NY), (1998).

[2] D.H. Fowler: Ratio in early Greek mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **1** (N.S.), 807-846 (1979).

[3] A. Scimone: *La Sezione Aurea. Storia culturale di un Leitmotiv della Matematica.* Sigma, Palermo, (1997).

[4] G. Markowsky: Misconceptions about the golden ratio. *The College Mathematical Journal*, **23**, 2-18 (1992).

[5] J.F. Putz: The golden section and the piano sonatas of Mozart. *Mathematics Magazine*, **68**, 275-282 (1995).

[6] R. Fishler: How to find the "golden number" without really trying. *The Fibonacci Quarterly*, **19**, 406-410, (1981).

[7] A. Brousseau: A primer for the Fibonacci numbers. Part X: On the representation of integers. *The Fibonacci Quarterly*, **10**, 635-642, (1972).

[8] P. Fenwick: Zeckendorf integer arithmetic. *The Fibonacci Quarterly*, **41**, 405-413, (2003).